有名なエネルギーと質量と光速に関するアインシュタインの方程式

$$E = mc^2 \tag{1}$$

から出発する。これは運動量が 0 の場合で実際には

$$E^2 = m^2c^4 + c^2p^2 \tag{2}$$

が正しく、これで p を 0 として両辺平方根をとると一つ前の式に戻ることがわかるだろう。ここで運動量の大きさの 2 乗

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \tag{3}$$

を定義している。量子力学では、エネルギーと運動量を

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{4}$$

$$\vec{p} \to -i\hbar\nabla \tag{5}$$

と置き換えて演算子にすればよい。簡略化のため自然単位系

$$c = 1, \hbar = 1 \tag{6}$$

を採用しておく。すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = -m^2\phi \tag{7}$$

となる。ここで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{8}$$

であり、φは波動関数である。これはクライン・ゴルドン方程式と呼ばれている。

しかし、この方程式は二階の微分を含んでいることから、解くと負のエネルギーと負の確率密度が得られることが知られている。それを避けるためには等価な一階微分方程式が必要であると考えたディラックは演算子や波動関数を行列へと拡張した。すなわち、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \to \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \tag{9}$$

とできれば、クラインゴードン方程式の演算子の平方根をとって二階微分方程式を一階微分方程式に出来る。つまり

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 \tag{10}$$

が成り立つ方法があれば良い。しかし、当然ながらこれは普通の数値では正しい式では無い。ところが行列なら簡単に実現できる。つまり行列は積の順番を入れ替えると異なった値となるから

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 \tag{11}$$

となることから、もし

$$ab + ba = 0 \tag{12}$$

であればよい。

その方針に従ってクラインゴードン方程式を以下のように書き換えたものをディラック方程式という。

$$(i\partial^\mu \gamma_\mu - m)\,\psi = 0 \tag{13}$$

ここで

$$\partial^\mu \gamma_\mu = \gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} - \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial y} - \gamma_3 \frac{\partial}{\partial z} \tag{14}$$

であり、任意の異なる i,j に対して

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 0 \tag{15}$$

が成り立ち、

$$\gamma_0 \gamma_0 + \gamma_0 \gamma_0 = 1 \tag{16}$$

$$\gamma_i \gamma_i + \gamma_i \gamma_i = -1 (i \neq 0) \tag{17}$$

となる行列である。この条件の下でディラック方程式の質量の項を移項してから演算子部分を 2 乗すれば、クラインゴードン方程式に戻ることが容易に証明できる。

ディラック方程式はクォークなど、フェルミオンと呼ばれる自由粒子が従う方程式である。フェルミオンの質量が無くヒッグス粒子があると、この方程式は

$$(i\partial^\mu \gamma_\mu - y\Phi)\,\psi + \text{other} = 0 \tag{18}$$

のような形で書かれる。ここで Φ はヒッグス粒子の波動関数、y は何か定数、other は他の今はあまり関係のない項である。

ここで真空中を運動する粒子について考えてみる。もし、ヒッグスに真空期待値があれば、その定数部分を Φ_0、それ以外の揺らぎの部分を ϕ として

$$\Phi = \Phi_0 + \phi \tag{19}$$

と書ける。すると上の方程式は

$$(i\partial^\mu \gamma_\mu - y\Phi_0 - y\phi)\,\psi + \text{other} = 0 \tag{20}$$

となる。これと元のディラック方程式を比べて見ると

$$m \to y\Phi_0 \tag{21}$$

という対応が見て取れる。つまり、ヒッグスに真空期待値があれば、フェルミオンは質量を得る事がわかる。